LYCEE HEDI CHAKER SFAX DEVOIR DE SYNTHESE N°1 PROF : LOUATI Med	EPREUVE : MATHEMATHIQUES	
	Classe : 4ème MATHS 1	
	Durée : 3h	Coefficient : 4

Exercice 1 :(5 points)

Soit $ABCD$ un carré de centre O situé dans le plan orienté tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ On note $I = A * B$; $J = B * C$ et $K = C * D$

1) a) Montrer qu'il existe un et un seul déplacement f tel que $f(C) = J$ et $f(J) = O$ dont on précisera mesure de son angle.

b) Caractériser $f \circ f$ et en déduire que f est une rotation de centre $\Omega = O * C$

2) a) Préciser l'image de O par f et en déduire que l'image du point I par f est le point D.

b) Quelle est la nature du triangle ΩID ?

3) On pose $g = t_{\overrightarrow{CJ}} \circ f$; $h = S_{(BD)} \circ g$ et $\varphi = h \circ S_{(AB)}$

a) Préciser $g(O)$ puis caractériser g. En déduire l'image du carré $ABCD$ par g

b) Préciser $h(O)$ et $h(J)$ puis caractériser h et φ

4) On désigne par D' le symétrique de D par rapport à C ; A' le symétrique de A par rapport à D et $I' = A' * C$. Soit R la rotation qui transforme A en D' et D en C

a) Caractériser R

b) Déterminer $R(A')$

c) On pose $g' = R \circ S_{(AD)}$. Montrer que g' est une symétrie glissante dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 2 :(5 points)

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z: $z^2 - (2\sin\theta + i)z + 1 - \cos\theta + i\sin\theta = 0$ où $\theta \in [-\pi, \pi[$

1) a) Vérifier que $4\,sin^2\theta + 4\cos\theta - 5 = -(2\cos\theta - 1)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation(E)

2) On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé$(o, \vec{u}, \vec{v})$, les points M' et M'' d'affixes respectives $z' = \sin\theta + i\cos\theta$ et $z'' = \sin\theta + i(1 - \cos\theta)$.
On désigne par I le milieu du segment $[M'M'']$

a) Déterminer suivant θ, la forme exponentielle de z' et de z''

b) Calculer l'affixe de I, puis déterminer l'ensemble des points I lorsque θ varie dans$[-\pi, \pi[$

c) Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M'M''}$ et en déduire que lorsque les points M' et M'' sont distincts, la droite$(M'M'')$ est parallèle à$(o,\vec{v})$

d) En déduire que les points M' et M'' sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = \frac{1}{2}$

3) a) Déterminer l'ensemble E des points M' lorsque θ varie dans$[-\pi,\pi[$

b) En déduire l'ensemble F des points M'' lorsque θ varie dans$[-\pi,\pi[$

c) Soit $\Gamma = M(z) \in \mathcal{P}\ /\ \arg\left(\frac{z-2i}{iz}\right) \equiv 0[\pi]$

Montrer que Γ est égale à F privé de O et $A(2i)$

4) Soit Ω le point d'affixe $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

a) Montrer que si M'' est l'image de M' par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$ alors $z'' = i\,z' + (1-i)z_\Omega$

b) En déduire la valeur de θ pour laquelle M'' soit l'image de M' par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (on donne $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

Exercice 3 :(6 points)

Soit la fonction f définie sur $]1\,;2]$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$

On désigne par C_f la courbe représentative dans un repère orthonormé$(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) f est-elle dérivable en 2 ? Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Montrer que f est dérivable sur $]1;2[$ et calculer $f'(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Construire la courbe C_f dans le repère$(o,\vec{i},\vec{j})$

2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]1;2]$une solution unique α et que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$

3) a) Montrer que f est une bijection de $]1;2]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer que pour tout x de J, on a : $f^{-1}(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

c) Construire la courbe $C_{f^{-1}}$ dans le même repère$(o,\vec{i},\vec{j})$

4) Soit la suite(U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f^{-1}(U_n) \end{cases}$; $\forall\, n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}$ on a : $1 \leq U_n \leq 2$

b) Montrer que pour tout x de $[1;2]$ on a : $\left|(f^{-1})'(x)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

c) Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|U_n - \alpha|$

d) En déduire que la suite(U_n) est convergente et déterminer sa limite.

***Exercice 4** :(4 points)*

Soit la fonction f définie sur $[0;2[$ par : $f(x) = tg\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

1) ***a)*** Montrer que f est une bijection de $[0;2[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que pour tout x de $[0;+\infty[$, on a : $(f^{-1})'(x) = \frac{4}{\pi(1+x^2)}$

2) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{2n} f^{-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)$

a) Soit n de $\mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout entier naturel k tel que $n \leq k \leq 2n$, on a : $f^{-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right) \leq f^{-1}\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq f^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

b) En déduire que la suite (U_n) converge vers une limite que l'on précisera.

3) Soit la fonction g définie sur $[0;2[$ par : $g(x) = \frac{1+\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}$

a) Montrer que g est une bijection de $[0;2[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[1;+\infty[$ et que pour tout x de $[1;+\infty[$, on a : $(g^{-1})'(x) = \frac{8}{\pi(1+x^2)}$

c) Montrer que pour tout x de $[1;+\infty[$, on a : $2f^{-1}(x) - g^{-1}(x) = 2$

Fin